Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Кафедра «Криптология и кибербезопасность»

Криптографические протоколы

курс лекций

Запечников Сергей Владимирович,
*профессор кафедры «Криптология
и кибербезопасность» НИЯУ МИФИ*

Москва – 2018

Криптографические протоколы

курс лекций

Лекция 1.
Вероятностные доказательства

05 февраля 2018 г.

Интерактивные системы доказательства (1)

Интерактивная система доказательства (*interactive proof system*) **– протокол, включающий двух участников:** ***доказывающего*** (*prover* – ***P***) **и** ***проверяющего*** (*verifier* – ***V***). **Предварительно формулируется некоторое утверждение** ***S*****, например, утверждение о том, что некоторый объект** ***w*** **обладает свойством** ***L*****:** $w \in L$**. В ходе протокола** ***P*** **и** ***V*** **обмениваются сообщениями. Каждый из них может генерировать случайные числа и использовать их в своих вычислениях. В конце протокола** ***V*** **должен вынести свое окончательное решение о том, является ли** ***S*** **истинным или ложным.**

Цель участника ***P*** **всегда заключается в том, чтобы убедить участника** ***V*** **в том, что** ***S*** **истинно, независимо от того, истинно ли оно на самом деле или нет. Таким образом,** ***P*** **может мошенничать в протоколе, так как** ***S*** **может быть ложно, т.е. он может быть активным противником.** ***V*** **должен проверять аргументы участника** ***P*****. Цель участника** ***V*** **заключается в том, чтобы вынести решение, является ли** ***S*** **истинным или же ложным, то есть интересы участников протокола** ***P*** **и** ***V*** **не совпадают.**

Интерактивные системы доказательства (2)

Однако участник *V* имеет полиномиально ограниченные вычислительные возможности, а именно время его работы ограничено некоторым полиномом от длины доказываемого утверждения: $t \le p(|w|)$. Это предположение является стандартным для моделирования вычислительных возможностей обычных средств вычислительной техники. В силу этого он самостоятельно, без помощи *P*, не способен распознать истинность утверждения *S*.

Вычислительные возможности *P* никак не ограничиваются, что в действительности может соответствовать ситуации, когда *P* владеет какой-то трудно получаемой информацией (хотя он может и обманывать, утверждая, что такая информация у него имеется).

Программа действий участника *V* должна быть устроена таким образом, чтобы:

1) если *S* истинно, *P* смог бы убедить *V* признать это;

2) если *S* ложно, *P* не смог бы убедить *V* в противном, какие бы аргументы он ни выдвигал, т.е. вне зависимости от получаемых от *P* сообщений.

V может ошибаться, но ставится условие, чтобы вероятность принятия им неправильного решения была бы пренебрежимо мала.

Пример интерактивной системы доказательства, основанной на задаче теории чисел (1)

Зададимся натуральным числом *n*. Рассмотрим мультипликативную группу $Z_n^* = \{x < n; (x,n) = 1\}$**. Обозначим** $QR = \{(x,n) \mid x < n, (x,n) = 1, \exists y : y^2 \equiv x \bmod n\}$ **– множество квадратичных вычетов числа *n*. Напомним, что если сравнение** $y^2 \equiv x \pmod n$ **имеет решение, то *x* называется квадратичным вычетом числа *n*. В противном случае *x* называется квадратичным невычетом. Тогда** $L = QNR = \{(x,n) \mid x < n, (x,n) = 1, \nexists y : y^2 \equiv x \bmod n\}$ **– множество квадратичных невычетов числа *n*. *P* доказывает *V* утверждение** $S : (x,n) \in QNR$**.**

Задача распознавания квадратичных вычетов не решаема за полиномиальное время. В силу этого проверяющий, полиномиально ограниченный в своих вычислительных ресурсах, не может самостоятельно проверить истинность сформулированного утверждения.

Пример интерактивной системы доказательства, основанной на задаче теории чисел (2)

	P		**V**
1		$\leftarrow$	Для $i=\overline{1,k}, k=\lvert n\rvert$ выбирает: $b_i \in \{0,1\}$ – случайный бит, $z_i \in Z_n^*$ и вычисляет $(w_1,\dots,w_k)$, где $w_i = \begin{cases} z_i^2 (\bmod n), если (b_i = 1) \\ x\cdot z_i^2 (\bmod n), если (b_i = 0) \end{cases}$
2	Для $i=\overline{1,k}$ вычисляет $(c_1,\dots,c_k)$, где $c_i = \begin{cases} 1, если (w_i, n) \in QR \\ 0, если (w_i, n) \notin QR \end{cases}$	$\rightarrow$	
3			Принимает доказательство тогда и только тогда, когда для $\forall (i=\overline{1,k})$ $c_i = b_i$.

Свойства интерактивной системы доказательства (1)

Утверждение 1. **Для** $\forall x \in QNR$ **если** $(x,n) \in QNR$ **, т.е.** $\nexists y : y^2 \equiv x \pmod{n}$ **, то *P* докажет *V* утверждение *S* с вероятностью, равной 1.**

Доказательство: **Рассмотрим действия участника *V* на шаге (1) протокола.**

Когда b_i=1, по условию протокола $\exists z_i : z_i^2 \equiv w_i \pmod{n}$**. По определению вычета это означает, что** $(w_i, n) \in QR$**, т.е. w_i является квадратичным вычетом числа *n*.**

Когда b_i=0, по условию протокола $z_i^2 \cdot x \equiv w_i \pmod{n}$ **. Из доказываемого утверждения известно, что** $(x,n) \in QNR$**. Может ли w_i быть квадратичным вычетом числа *n*? Для этого должно быть:** $\left(z_i \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^2 \equiv w_i \pmod{n}$**. Это может быть, только если *x*=1. Но** $(1,n) = 1$ **. Кроме того,** $\exists y = 1 : y^2 \equiv 1 \pmod{n}$ **. Следовательно,** $(1,n) \in QR$ **– мы пришли к противоречию с исходным утверждением.**

Следовательно, b_i=0 тогда и только тогда, когда $(w_i, n) \in QNR$**, т.е. мы установили однозначную связь: w_i является квадратичным вычетом числа *n* только при b_i=1. Распознавая *QR* на шаге (2) протокола (эту задачу нельзя решить за полиномиальное время), доказывающий *P* будет отвечать битом c_i=1 тогда и только тогда, когда b_i=1, т.е. на шаге (3) результат проверки всегда будет положительным, и *V* всегда примет доказательство.**

Свойства интерактивной системы доказательства (2)

Утверждение 2. **Для** $\forall x$ **если** $(x,n) \notin QNR$**, то вероятность ошибки** V **составляет** $\mathrm{P}_V^{ош} = \dfrac{1}{2^k}$**.**

Доказательство:

Когда b_i**=1, по условию протокола** $\exists z_i : z_i^2 \equiv w_i \pmod n$**. По определению вычета это означает, что** $(w_i, n) \in QR$**, т.е.** w_i **является квадратичным вычетом числа** n**.**

Когда b_i**=0, по условию протокола** $w_i \equiv x \cdot z_i^2 \pmod n$**. Если** $(x,n) \notin QNR$**, т.е.** $(x,n) \in QR$**, то** $(x,n) = 1, \exists y : y^2 \equiv x \pmod n$**. Тогда можно записать, что** $w_i \equiv y^2 \cdot z_i^2 \pmod n$**, или, что то же самое,** $w_i \equiv (y \cdot z_i)^2 \pmod n$**. Значит,** $\exists v = y \cdot z_i : v^2 \equiv w_i \pmod n$**, т.е.** $(w_i, n) \in QR$**. Итак,** w_i**– случайный квадратичный вычет числа** n**.**

В любом случае: b_i**=0 или** b_i**=1 – участник** P **на шаге (2) протокола всегда будет распознавать число** w_i **как квадратичный вычет числа** n**. Следовательно, он может угадать, какой бит** $b_i = \{0,1\}$ **был выбран, только случайно, с вероятностью** $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}$**. Следовательно, все** k **бит** $\{b_1, \ldots, b_k\}$ **он сможет угадать лишь с вероятностью** $\mathrm{P} = 2^{-k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$**.**

Пример интерактивной системы доказательства, основанной на задаче теории графов (1)

Графы G_0 **и** G_1 **называются изоморфными, т.е.** $G_0 \approx G_1$**, если существует взаимно однозначное соответствие между их вершинами, при котором соединенным ребром вершинам в графе** G_0 **соответствуют соединенные вершины в графе** G_1**.**

Задача проверки изоморфности графов не решаема за полиномиальное время.

Не упрощая задачи, можно предполагать, что G_0 **и** G_1 **– графы на одном и том же множестве вершин** N **мощности** m**:** $|N| = m$. $L = GNI = \{(G_0, G_1) | \forall G_0 \not\approx G_1\}$ **– множество пар неизоморфных графов.** P **доказывает** V **утверждение** $S = (G_0, G_1) \in GNI$.

Пример интерактивной системы доказательства, основанной на задаче теории графов (2)

	P		*V*
1		$\leftarrow$	Для $i=\overline{1,m}$ берет $\alpha_i \in \{0,1\}$ – случайный бит, создает изоморфную копию $G_{\alpha_i}{}' \approx G_{\alpha_i}$ путем случайной перестановки вершин: $G_{\alpha_i}{}' = \{(\pi(u),\pi(v)) \mid (u,v) \in E_{\alpha_i}\}$
2	Для $i=\overline{1,m}$ вычисляет $\beta_i \in \{0,1\}$ так, что: $\begin{cases} \beta_i = 0, если\left(G_{\alpha_i}{}' \approx G_0\right), \\ \beta_i = 1, если\left(G_{\alpha_i}{}' \approx G_1\right), \\ \beta_i - случ., если\left(G_0 \approx G_1\right), о \\ \beta_i = 0, если\begin{pmatrix} G_{\alpha_i}{}' \not\approx G_0, \\ G_{\alpha_i}{}' \not\approx G_1 \end{pmatrix}, \end{cases}$ тправляет β_i проверяющему	$\rightarrow$	
3			Принимает доказательство тогда и только тогда, когда все биты совпали: для $\forall \alpha = \overline{1,m}$ $\beta_i = \alpha_i$.

Свойства интерактивных доказательств

Протокол между участниками *P* и *V* называется *интерактивным доказательством* для языка *L*, если *V* полиномиально ограничен, и выполнены следующие два условия:

1) для $\forall x \in L$ $\mathrm{P}\{(P,V)_{(x)} = 1\} \geq 1 - \frac{1}{2^{n^C}}$**, где *C=Const*., *n* – число раундов протокола (т.е. вероятность принятия проверяющим доказательства истинного утверждения стремится к единице);**

2) для $\forall x \in L$ **и для** $\forall P' \neq P$ **(для любого другого участника, который действует не так, как честный участник) вероятность принятия проверяющим доказательства ложного утверждения исчезающе мала, т.е.** $\mathrm{P}\{(P',V)_{(x)} = 1\} \leq \frac{1}{2^{n^C}}$**.**

Условие 1 называется *полнотой* (completeness), условие 2 – *корректностью* (soundness) доказательства. Класс языков, обладающих интерактивными системами доказательства, обозначается *IP*.

***Теорема.* (*A.Shamir, A.Shen, 1990*) *IP=PSPACE*, т.е. класс задач, обладающих интерактивными системами доказательства, совпадает с классом задач, решаемых с полиномиальным объемом памяти.**

Доказательства с нулевым разглашением: постановка задачи (1)

Пусть задана интерактивная система доказательства $\langle P, V, S\rangle$. В определении интерактивной системы доказательства ранее не предполагалось, что *V* может быть противником (предполагалась только возможность существования нечестного участника P'). Но *V* может оказаться противником, который хочет выведать у *P* какую-либо новую полезную информацию об утверждении *S*. В этом случае *P* может не хотеть, чтобы это случилось в результате работы протокола интерактивной системы доказательства $\langle P, V, S\rangle$. Таким образом приходим к идее протокола доказательства с *нулевым разглашением* (zero-knowledge proof). Нулевое разглашение подразумевает, что в результате работы протокола интерактивной системы доказательства *V* не увеличит свои знания об утверждении *S*, или, другими словами, не сможет извлечь никакой информации о том, почему *S* истинно.

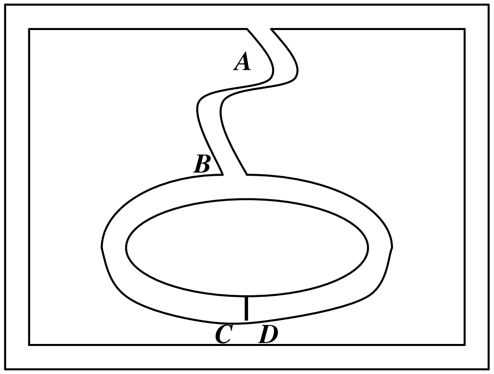
Как и ранее, в протоколе предварительно формулируется некоторое утверждение *S*, например, о том, что некоторый объект *w* обладает свойством *L*: $w \in L$. В ходе протокола *P* и *V* обмениваются сообщениями. Каждый из них может генерировать случайные числа и использовать их в своих вычислениях. В конце протокола *V* должен вынести свое окончательное решение о том, является ли *S* истинным или ложным.

Доказательства с нулевым разглашением: постановка задачи (2)

Цель *P* всегда состоит в том, чтобы убедить *V* в том, что *S* истинно, независимо от того, истинно ли оно на самом деле или нет, т.е. *P* может быть активным противником, а задача *V* – проверять аргументы *P*. Цель участника *V* заключается в том, чтобы вынести решение, является ли *S* истинным или же ложным. Как и ранее, *V* имеет полиномиально ограниченные вычислительные возможности, а именно время его работы ограничено некоторым полиномом от длины доказываемого утверждения: $t \le p(|w|)$**. В силу этого он самостоятельно, без помощи *P*, не способен распознать истинность высказывания *S*. Вычислительные возможности *P* никак не ограничиваются.**

«Задача о пещере Али-Бабы»

Это модельная задача, наглядно иллюстрирующая суть доказательств с нулевым разглашением. Имеется пещера, план которой показан на рисунке. Пещера имеет дверь с секретом между точками *C* и *D*. Каждый, кто знает волшебные слова, может открыть эту дверь и пройти из *C* в *D* или наоборот. Для всех остальных оба хода пещеры ведут в тупик.



Пусть *P* знает секрет пещеры. Он хочет доказать *V* знание этого секрета, не разглашая волшебные слова. Вот протокол их общения.

1. *V* находится в точке *A*.
2. *P* заходит в пещеру и добирается либо до точки *C*, либо до точки *D*.
3. После того, как *P* исчезает в пещере, *V* приходит в точку *B*, не зная, в какую сторону пошел *P*.
4. *V* зовет *P* и просит его выйти либо из левого, либо из правого коридора пещеры согласно желания *V*.
5. *P* выполняет это, открывая при необходимости дверь, если, конечно, он знает волшебные слова.
6. *P* и *V* повторяют шаги (1) – (5) *n* раз.

Если *P* не знает секрета двери, вероятность того, что *V* попросит его выйти из того же коридора, в который он вошел, равна $\frac{1}{2}$. После *n* раундов вероятность сократится до $\frac{1}{2^n}$.

Протокол доказательства изоморфизма графов

P **хочет доказать** ***V*** **изоморфизм графов** G_0 **и** G_1**. Пусть** $G_1 = \varphi(G_0): G_0 \approx G_1$**, где** φ **- преобразование изоморфизма.** m **– мощность множества** ***N*** **вершин графов.**

<table>
<tr><th></th><th>P</th><th></th><th>V</th><th></th></tr>
<tr><td>1</td><td>π - случайная перестановка вершин, вычисляет $H = \pi G_1$</td><td>$\rightarrow$</td><td></td><td rowspan="4">m раз</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>$\leftarrow$</td><td>$\alpha = \{0,1\}$-случ.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Посылает преобразование ψ, такое что: $$\psi = \begin{cases} \pi, если(\alpha = 1), \\ \pi \circ \varphi, если(\alpha = 0). \end{cases}$$</td><td>$\rightarrow$</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td>Вычисляет граф ψG_α и сравнивает: $H \overset{?}{=} \psi G_\alpha$.</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td colspan="2">Принимает доказательство тогда и только тогда, когда для $\forall m \;\; H^{(m)} = \psi G_\alpha^{(m)}$.</td></tr>
</table>

Протокол доказательства знания дискретного логарифма

Перед началом работы протокола задаются открытые величины: *p, q* – простые числа, такие, что $q|(p-1)$**, элемент** $g \in Z_p^*$**, число *X*. Доказывающему *P* известна секретная величина** $x : x \in Z_q, g^x = X$ **, знание которой он должен доказать *V*, не разглашая самой секретной величины.**

	P		***V***
1	$r \in_R Z_q$ $M = g^r \pmod p$	$\rightarrow$	
2		$\leftarrow$	$R \in_R Z_q$
3	$m = r + xR \pmod q$	$\rightarrow$	
4			$g^m \overset{?}{=} X^R \cdot M \pmod p$

Протокол доказательства знания представления числа в базисе

Перед началом работы протокола задаются открытые величины, известные всем участникам: простые числа *p*, *q*, элементы $y, g_1, g_2, ..., g_k \in G_q$. Доказывающему *P* известны секретные величины $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in Z_q : y = g_1^{\alpha_1} \cdot g_2^{\alpha_2} ... \cdot g_k^{\alpha_k}$, знание которых он должен доказать *V*, не разглашая самих этих величин.

	P		***V***
1	$r_1, r_2, ..., r_k \in_R Z_q$ $M = g_1^{r_1} \cdot g_2^{r_2} \cdot ... \cdot g_k^{r_k}$	$\rightarrow$	
2		$\leftarrow$	$R \in_R Z_q$
3	$m_i = r_i + \alpha_i R, i = \overline{1, k}$	$\rightarrow$	
4			$g_1^{m_1} \cdot g_2^{m_2} \cdot ... \cdot g_k^{m_k} \stackrel{?}{=} y^R \cdot M$

Доказательство знания представления множества чисел в соответствующих базисах

Перед началом работы протокола задаются открытые величины, известные всем участникам: простые числа *p,q*, элементы $y^{(j)}, g_1^{(j)}, g_2^{(j)},\ldots, g_k^{(j)} \in G_q$ **для некоторых *(j)*. Доказывающему *P* известны секретные величины** $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in Z_q$**, такие, что для** $\forall j$ $y^{(j)} = \left(g_1^{(j)}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(g_2^{(j)}\right)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \left(g_k^{(j)}\right)^{\alpha_k}$**, знание которых он должен доказать *V*, не разглашая самих этих величин.**

	P		***V***
1	$r_1, r_2,\ldots, r_k \in_R Z_q$, для $\forall j$ $M^{(j)} = \left(g_1^{(j)}\right)^{r_1} \cdot \left(g_2^{(j)}\right)^{r_2} \cdot \ldots \cdot \left(g_k^{(j)}\right)^{r_k}$	$\rightarrow$	
2		$\leftarrow$	$R \in_R Z_q$
3	$m_i = r_i + \alpha_i R, i = \overline{1,k}$	$\rightarrow$	
4			для $\forall j$ $\left(g_1^{(j)}\right)^{m_1} \left(g_2^{(j)}\right)^{m_2} \cdot \ldots \cdot \left(g_k^{(j)}\right)^{m_k} \stackrel{?}{=}$ $\stackrel{?}{=} \left(y^{(j)}\right)^R \cdot M^{(j)}$

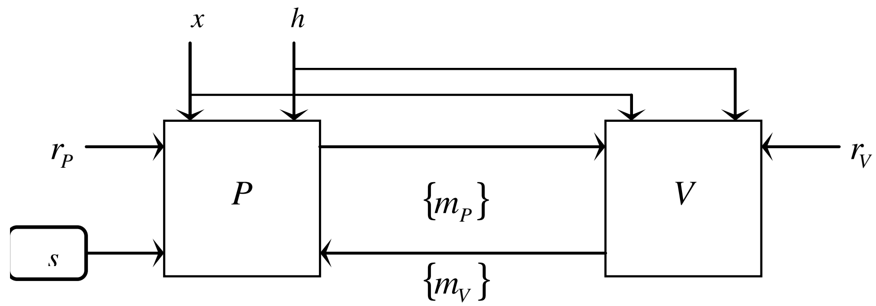
Структура протоколов доказательства с нулевым разглашением

В общем виде протокол интерактивного доказательства с нулевым разглашением состоит из четырех шагов:

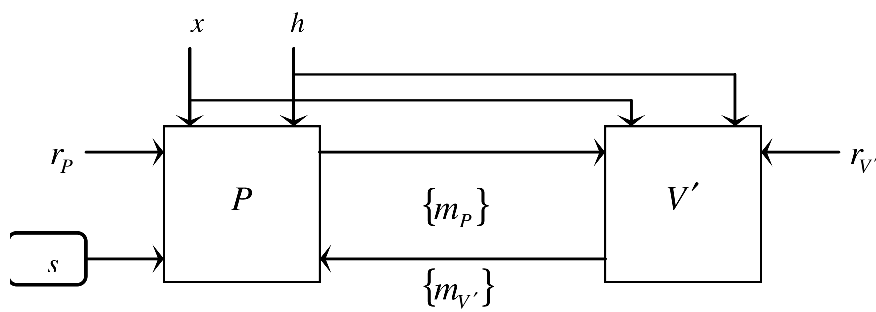
- **доказывающий передает проверяющему *W* – результат вычисления однонаправленной функции от секретной величины, знание которой он доказывает;**
- **проверяющий посылает ему случайный запрос;**
- **доказывающий отвечает на этот запрос, причем ответ зависит как от случайного запроса, так и от секретной величины, но из него вычислительно невозможно получить эту секретную величину;**
- **получая ответ, *V* проверяет его соответствие величине, переданной на первом шаге.**

	P	$S : x \in L$ – доказываемое утверждение, *h* – др. общедоступные параметры и величины, *s* – секретные данные доказывающего о том, почему *S* истинно, *r* – случ. число	***V***
1	r_P – случ., $W = f_1(x, r_P)$	$\rightarrow$	
2		$\leftarrow$	r_V – случ., $C = f_2(r_V)$
3	$R = f_3(C, x)$	$\rightarrow$	
4			$R \overset{?}{\approx} W$

Свойства доказательств с нулевым разглашением (1)



честный проверяющий



противник M

Пусть $\{m_P\},\{m_V\}$ – совокупность всех сообщений, передаваемых от *P* к *V* (соответственно от *V* к *P*), каждое из которых является случайной величиной, и таким образом, $\{x, h, r_V, \{m_P\}, \{m_V\}\} = view_{P,V}(x,h)$ – это ансамбль случайных величин протокола, наблюдаемых извне (внешним наблюдателем), $\{x, h, r_{V'}, \{m_P\}, \{m_V\}\} = M_{V'}(x,h)$ – это ансамбль случайных величин, получаемых в результате работы полиномиального моделирующего алгоритма (simulator), который выполняется внешним наблюдателем (противником) самостоятельно.

Свойства доказательств с нулевым разглашением (2)

Если величины $view_{P,V}(x,h) \overset{C}{\approx} M_{V'}(x,h)$ *вычислительно неразличимы* за полиномиальное время (т.е. не существует никакого алгоритма, который за полиномиальное время мог бы распознать эти два ансамбля случайных величин), то говорят, что протокол обеспечивает *вычислительно нулевое разглашени* (computationally zero-knowledge).

Если величины $view_{P,V}(x,h) \approx M_{V'}(x,h)$ *одинаково распределены* над множеством случайных величин, то говорят, что протокол обеспечивает *абсолютно нулевое разглашение* (perfect zero-knowledge).

Система $\langle P, V, S \rangle$ называется *интерактивной системой доказательства с нулевым разглашением* для языка *L*, если она:

1) является интерактивной системой доказательства для языка *L* (т.е. обладает свойствами полноты и корректности);

2) обладает свойством нулевого разглашения.

Теорема 1. **(*Goldreich O., Krawchyk H.*) Последовательное выполнение двух протоколов с нулевым разглашением является протоколом с нулевым разглашением.**

Теорема 2. **(*Goldreich O., Krawchyk H.*) Параллельное выполнение протоколов с нулевым разглашением не обязательно приводит к протоколу с нулевым разглашением.**

Другие виды вероятностных доказательств

Среди всех протоколов доказательства с нулевым разглашением выделяют класс протоколов *доказательства знания* (*proof of knowledge*).

Например, доказательство знания чисел *p*, *q*, таких, что $p \cdot q = n$ есть доказательство знания, но доказательство того, что *n* – составное число, доказательством знания не является – это так называемое *доказательство обладания* (*proof of possession*).

Но доказательство знания не обязательно должно быть доказательством с нулевым разглашением, так как можно просто сообщить секрет другой стороне протокола: при этом сообщивший докажет знание секрета, но тем самым разгласит секрет. В различных приложениях криптографии, в частности, в протоколах аутентификации и в схемах электронных платежей, встречаются протоколы *доказательства знания с нулевым разглашением* (*zero-knowledge proof of knowledge – ZKPK*). Существуют специальные разновидности протоколов доказательства знания с нулевым разглашением: протоколы группового и «скрытого» доказательства знания и др.

***Неинтерактивные доказательства с нулевым разглашением* (*non-interactive zero-knowledge proofs*) – однораундовые протоколы доказательства с нулевым разглашением, в которых доказывающий формирует, а проверяющий проверяет доказательство, пользуясь общей ссылочной строкой (common reference string), которая служит заменой случайного запроса проверяющего к доказывающему на шаге (2) обычного интерактивного протокола.**